BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С.Т.ГУСЕЙНОВ

Бакинский Государственный Университет

sarvanhuseynov rambler. ru

В статье исследуется модельное равномерно вырождающееся эллиптическое уравнение второго порядка, для которого множество гладких функций не плотно в соответствующем весовом соболевском пространстве. Вводятся понятия W и H решений, доказывается однозначная разрешимость соответствующих задач Дирихле.

§1. Введение

Рассмотрим в ограниченной области D евклидова пространства R^n $(n\geq 2)$ уравнение

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0, \tag{1}$$

в предположении, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ являются измеримыми функциями в D, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$, $i,j=1,2,...,n;$ кроме того, для любого $\xi\in E_n$, $x\in D$

$$\mu\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\xi_i^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\mu^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\xi_i^2, \tag{2}$$

здесь $\mu\in(0,1]$ - константа.

В данной работе рассматриваются весовые функции более общего вида. А именно, предполагается, что гиперплоскость $\sum=\{x\in R^n : x_n=0\}$ разделяет область D на две подобласти

$$D^{(1)}=D\bigcap\{x:x_n>0\}\ \text{ и }\ D^{(2)}=D\bigcap\{x:x_n<0\}.$$

Кроме этого,

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}|x|_\alpha^{\alpha_i^{(1)}},\ x\in D^{(1)},\ 0<\alpha_i^{(1)}<2,\\ |x|_\alpha^{\alpha_i^{(2)}},\ x\in D^{(2)},\ 0<\alpha_i^{(2)}<2,\end{cases}\ i=1,2,...,n;\quad , \tag{3}$$

где каждая из чётных относительно $\sum$ весовых функций $\lambda_i(x)$, $i=1,2,...,n$, удовлетворяет A_2 - условию Макенхаупта. Обозначим:

$$\Lambda(x)=\{\lambda_1(x),\lambda_2(x),...,\lambda_n(x)\},\ B=\{x:|x|<1\}.$$

С уравнением (1) связан класс функций

$$W(D,\Lambda)=\left\{u:u\in W_1^1(D),\left(u^2+|\nabla u|^2\right)\Lambda\in L_1(D)\right\},\tag{4}$$

здесь $W_1^1(D)$- классическое соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка. Ниже $W(D,\Lambda)$ рассматривается как весовое соболевское пространство с нормой

$$\|u\|_W^2=\int_D\left(u^2+|\nabla u|^2\right)\Lambda dx.$$

Так как $\Lambda^{-1}\in L_1(D)$, то (см.[1]) пространство $W(D,\Lambda)$ полное. Замыкание множества функций из $W(D,\Lambda)$ с компактным носителем в D будем обозначать через $W_0(D,\Lambda)$.

Рассматриваемый вес удовлетворяет A_2- условию Махенхаупта [2] . Имеет место неравенство Фридрихса

$$\int_D u^2\Lambda dx\le C\int_D|\nabla u|^2\Lambda dx\quad \forall u\in W_0(D,\Lambda).\tag{5}$$

Поэтому в соболевском пространстве $W_0(D,\Lambda)$ норму можно задать равенством

$$\|u\|_{W_0}^2=\int_B|\nabla u|^2\Lambda dx.$$

Введем одно из возможных понятий решения уравнения (1).

Определение 1. *Функция* $u\in W(D,\Lambda)$ *называется* W *- решением уравнения (1), если интегральное тождество*

$$\int_D\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx=0\tag{6}$$

выполнено на пробных функциях $\psi\in W_0(D,\Lambda)$.

Множество гладких в D функций не плотно в пространствах $W(D,\Lambda)$ и $W_0(D,\Lambda)$.

В связи со сказанным выше имеет смысл определить пространства $H(D,\Lambda)$ и $H_0(D,\Lambda)$ как замыкание в $W(D,\Lambda)$ множеств $C^\infty(D)\bigcap W(D,\Lambda)$ и $C^\infty(D)$, соответственно.

Определение 2. *Функция* $u\in H(D,\Lambda)$ *называется* H *- решением уравнения (1), если интегральное тождество (6) выполнено на пробных функциях* $\psi\in H_0(D,\Lambda)$.

Введенные выше W - решения и H -решения уравнения (1) связаны W - и H - задачами Дирихле

$$Lu_1=0 \text{ в } D,\ u_1\in W(D,\Lambda),\ h\in C^\infty(\overline{D}),\ (u_1-h)\in W_0(D,\Lambda)\tag{7}$$

и

$$Lu_2=0 \text{ в } D,\ u_2\in H(D,\Lambda),\ h\in C^\infty(\overline{D}),\ (u_2-h)\in H_0(D,\Lambda),\tag{8}$$

соответственно.

Для весовой функции вида

$$\omega(x)=\begin{cases}|x|^{-\alpha_1}, & x_1>0, x_2>0;\\ |x|^{\beta_1}, & x_1<0, x_2>0;\\ |x|^{-\alpha_2}, & x_1<0, x_2<0;\\ |x|^{\beta_2}, & x_1>0, x_2<0,\ 0<\alpha_i<2,\ 0<\beta_i<2,\ i=1,2,\end{cases}$$

понятия W и H-решений уравнения рассматриваемого вида введены в [3], а однозначная разрешимость W и H-задач Дирихле и существование у них различных решений с одной и той же граничной функцией установлены в [5].

§2. Существование W - решений и H - решений

2.1. Соболевские пространства $W(D,\Lambda)$ и $H(D,\Lambda)$.

Ниже $\Lambda(x)$ означает вес, определенный равенством (3).

$$B^{(1)}=B\bigcap\{x:x_n>0\},\ B^{(2)}=B\bigcap\{x:x_n<0\},$$

$$B_r^{(i)}=B^{(1)}\bigcap\{x:|x|<r\},\ S_r^{(i)}=B^{(1)}\bigcap\{x:|x|=r\},\ i=1,2.$$

Пусть еще $d\mu_i=|x|^{-\alpha_i}$, $i=1,2$. Для измеримого множества $E\subset R^2$ полагается

$$\mu_i(E)=\int_E d\mu_i,\ i=1,2.$$

В работе [3] показано, что сужение функции $u\in W(D,\Lambda)$ на $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ имеет следы $u^{(i)}(0)$, $i=1,2$, в начале координат, равные

$$u^{(i)}(0)=\lim_{R\to 0}\oint_{B_R^{(i)}}u(x)d\mu_i,\ i=1,2 \qquad (9)$$

и для любого $R\in(0,1]$ имеет место неравенство Харди

$$\int_{B_R^{(i)}}\left(u(x)-u^{(i)}(0)\right)^2|x|^{-2}d\mu_i\le c\left(a_i^{(1)}\right)\int_{B_R^{(i)}}|\nabla u(x)|^2d\mu_i,\ \ i=1,2. \qquad (10)$$

Теорема 1. *Для принадлежности функции $u(x)$ весовому соболевскому пространству $H(D,\Lambda)$ необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$u^{(1)}(0)=u^{(2)}(0).$$

Ниже пространства $W_0(D,\Lambda)$ и $H_0(D,\Lambda)$ рассматриваются как гильбертовы со скалярным произведением

$$\langle u,\upsilon\rangle=\int_D\nabla u\nabla\upsilon\Lambda dx.$$

Рассмотрим задачи Дирихле (7) и (8).

Теорема 2. *Задачи (7), (8) однозначно разрешимы и существует граничная функция $h\in C^\infty(\overline{D})$, для которой решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ различны.*

Доказательство. Введением новых неизвестных функций $\upsilon_i(x)=u_i(x)-h(x)$

$i=1,2$, задачи (7), (8) преобразуются к видам:

$$L\upsilon_1 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \text{ в } D,\ \upsilon_1 \in W_0(D,\Lambda),$$

$$L\upsilon_2 = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \text{ в } D,\ \upsilon_2 \in H_0(D,\Lambda).$$

Решения здесь понимаются в смысле интегрального тождества

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx$$

на пробных функциях $\psi(x)$ из соответствующего соболевского пространства.

Однозначная разрешимость приведенных выше задач (а вместе с ними и задач (7), (8)) является следствием теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

Известно (см. [4]), что пространство $H_0(D,\Lambda)$ имеет коразмерность один в $W_0(D,\Lambda)$. Поэтому найдется ненулевой элемент $z \in W_0(D,\Lambda)$, такой, что

$$W_0(D,\Lambda) = \{u : u(x) = \psi(x) + sz(x)\}, \text{ где } \psi \in H_0(D,\Lambda),\ s \in R^1 \setminus \{0\},$$

и

$$\int_D a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0 \quad \forall \psi \in H_0(D,\Lambda). \tag{11}$$

Тождество (9) означает, что $z(x)$ есть слабое решение задачи Дирихле для однородного уравнения (1) с нулевым граничным условием на ∂D. Будем искать требуемое W - решение задачи (7) в виде $u_1(x) = u_2(x) + tz(x)$, где $u_2(x)$ - H - решение задачи (8). В силу (9) должно выполняться интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + t\frac{\partial z}{\partial x_j} \right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + s\frac{\partial z}{\partial x_i} \right) dx = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij}(x) \frac{\partial h}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + s\frac{\partial z}{\partial x_i} \right) dx,$$

$$\psi \in H_0(D,\Lambda),$$

которое вместе с (11) приводит к условию

$$\int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} dx = -\int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} dx. \tag{12}$$

Отсюда получаем, что $t \neq 0$, если только правая часть (12) отлична от нуля. Допуская равенство

$$\int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} dx = 0, \ \forall h \in C^\infty(\overline{D}),$$

заключаем, что функция $z(x)$ есть также решение задачи Неймана. Но тогда функция $z(x)$ служит решением уравнения (1). В каждой области вес является

липшицевым и согласно известному результату (см.[6]), $z(x)\equiv 0$ в каждой области. Это противоречит тому, что $z(x)\neq 0$ в $W_0(D,\Lambda)$. Тем самым доказано, что $u_1(x)\neq u_2(x)$ при подходящем выборе $h(x)$.
Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жиков В.В. Весовые соболевские пространства // Математический сборник, 1998, т.189, №8, с.27-58.
2. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy- Littlewood maximal function // Transactions A.M.S., 1972, v. 15, p.207-226.
3. С.Т.Гусейнов. Первая краевая задача для равномерно вырождающихся дивергентных эллиптических уравнений второго порядка // Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, 2006, №2, с. 41-48.
4. Жиков В.В. К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях // Функциональный анализ и его приложения, 2001, т.35, №1, с.23-39.
5. Алхутов Ю.А., Жиков В.В.. О гельдеровости решений одного эллиптического уравнения // Современная математика и ее приложения, 2003, т.10, с.8-21.

BİR SİNİF MÜNTƏZƏM CIRLAŞAN İKİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN DİRİXLE MƏSƏLƏSİ

S.T.HÜSEYNOV

XÜLASƏ

İşdə çəkili Sobolev fəzasında hamar funksiyalar çoxluğu sıx olmayan, müntəzəm cırlaşan 2-ci tərtib model elliptik tənliklər tədqiq olunur. W, H - həlləri anlayışı verilir və uyğun Dirixle məsələsinin birqiymətli həll olunması isbat olunur.

DIRICHLET PROBLEM FOR ONE CLASS OF UNIFORMLY DEGENERATING DIVERGENT ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

S.T.HUSEYNOV

SUMMARY

A model uniformly degenerating elliptic equation of the second order for which a set of smooth functions are not dense in corresponding weight Sobolev space is studied in the paper. The notion of W and H solutions is introduced, a unique solvability of corresponding Dirichlet problem is proved.